EXERCICE N°1 : 25' 5 points

Soit la fonction f définie sur $]-1,1[$ par : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

1°) Prouver l'existence et l'unicité d'une primitive notée F de $f(x)$ telle que $F(0) = 0$.

2°) Montrer que la fonction F est impaire.

3°) Soit G la fonction définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $G(x)=F(\sin x)$.

a) Montrer que G est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ et déterminer $G'(x)$.

b) En déduire que : pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$; $G(x)=x$.

c) Calculer $F\left(\dfrac{1}{2}\right);F\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right);F\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

4°) Soit la fonction $H(x)=F\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$. Montrer que H est dérivable sur $IR_+^* \setminus \{1\}$, et calculer $H'(x)$.

EXERCICE N°2 : 30' 5 points

Soit $f:[-2;2]\to IR\ x\mapsto (x-2)\sqrt{4-x^2}$.

1°) Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i}\ \vec{j})$.

2°) Prouver que f admet une primitive sur $[-2;2]$. Soit F la primitive de f sur $[-2;2]$ telle que F(0)=0.

3°) Soit g la fonction définie sur I = $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ par $g(x)=F(2\sin x)$.

a) Montrer que g est dérivable sur I.

b) Calculer $g'(x)$ et $g(0)$.

4°) Déterminer une primitive de chacune des fonctions g_1 et g_2 définie sur IR par: $g_1(x)=\sin x.\cos^2 x$

et $g_2(x)=\cos^2 x$

5°) En déduire $g(x)$ et calculer $F(-2)-F(2)$.

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn